MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR (DGES)

UNIVERSITE DE SAN PEDRO

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

CONCOURS BTP / CONSTRUCTION NAVALE
SESSION 2023

Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en justifiant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

La présentation, la qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements seront prises en compte dans la notation.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices indépendants et d'un problème à trois parties également indépendantes.

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt.$$

On se propose d'étudier la série numérique de terme général a_n. Pour ce faire, on considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$H_0 = 0 \text{ et pour tout entier } n \geq 1,\ H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\int_p^{p+1} \frac{1}{t}dt$, montrer que

$$0 \leq a_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite S appartient à l'intervalle $[0,1]$.
3. Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{t}{t+p}dt,$$

puis montrer que pour tout $p \geq 2$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leq a_p \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

4. En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geq 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leq S - S_n \leq \frac{1}{2n}.$$

5. Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + S + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \frac{1}{2n+2}$. Montrer que

$$0 \leq S - T_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7. Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de S à 10^{-2} près.
   Donner alors un encadrement de S à 10^{-2} près.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}^3$ considéré comme un espace vectoriel euclidien orienté muni de la base orthonormée directe canonique (i, j, k).

Soient $x, y \in E$, le produit scalaire est noté $< x , y >$, le produit vectoriel $x \wedge y$ et la norme de x : $\|x\|$.

Dans la base (i, j, k) , soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire de E.

Soit f un endomorphisme orthogonal de E et $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ la matrice de f dans (i, j, k).

On dira que le réel λ est valeur propre de f s'il existe un vecteur non nul v tel que

$$f(v) = \lambda v.$$

1. Calculer $ab + ac + bc$ puis $a + b + c$ dans tous les cas. On vérifiera et utilisera :

$$\det(M) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

2. Montrer que a, b et c sont les trois racines d'une équation du type :

$$x^3 - x^2 + p = 0.$$

   Exprimer p en fonction de a, b et c.
3. Montrer que λ est la valeur propre de f si et seulement si λ est racine de

   $P(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$ avec I_3 la matrice unité d'ordre 3.

4. Montrer que $P(\lambda)$ est un polynôme en λ de degré 3. En déduire que f admet au moins une racine propre réelle.
5. Si $\det(M) = 1$, montrer que 1 est une valeur propre de f. Soit u un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre 1 de f. Montrer que le sous-espace vectoriel $vect(u^\perp)$ engendré par $u^\perp$ (orthogonal de u), est stable par f et en déduire que f est une rotation.
6. Si $\det(M) = -1$, montrer que (-1) est une valeur propre de f. Soit u un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre (-1) de f et $F = vect(u^\perp)$. Montrer que si s est une symétrie orthogonale par rapport à F, $s \circ f$ est une rotation.

Problème

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Objectif du problème

Soit a un nombre réel. On se propose d'étudier les suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = (a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2au_n. \qquad (1)$$

On note E_a l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (1).

Pour toute suite $u \in E_a$ et tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Partie A : le cas $a = 0$

Dans cette partie, on étudie le cas où $a = 0$. On cherche l'ensemble E_0 des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 2u_{n+1}. \qquad (2)$$

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E_0.

On considère la suite $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$e_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq 1,\ e_n = 0.$$

1. Vérifier que $e \in E_0$.
2. Soit μ un nombre réel. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - \mu e_n$. Démontrer qu'il existe un réel μ tel que $v_2 = 3v_1 - 2v_0$ et démontrer que pour cette valeur de μ on a
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n.$$
3. Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β tels que
$$v_0 = \alpha + \beta, \qquad v_1 = \alpha + 2\beta.$$
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_n = \alpha + \beta 2^n$.
5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, où $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite constante de valeur 1.

6. Réciproquement, démontrer que toute suite de la forme mentionnée à la question 5. appartient à E_0.
7. Déterminer l'ensemble E_0.

Partie B : le cas $a = 3$

On étudie à présent le cas où $a = 3$. On cherche l'ensemble E_3 des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \tag{3}$$

Pour cela, on va utiliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E_3.

8. Pour tout entier naturel n, trouver une relation entre U_{n+1}, A et U_n.
9. En déduire que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.
10. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que P est inversible puis que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D, que l'on déterminera.

11. Démontrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
12. En déduire qu'il existe trois nombres réels x, y, z tels que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = x + y \times 2^n + z \times 3^n.$$

13. Démontrer que x, y, z s'expriment chacun linéairement en fonction de u_0, u_1, u_2.
14. Démontrer que toute combinaison linéaire des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E_3.
15. Déterminer l'ensemble E_3.
16. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E_3 telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer u_n pour tout entier naturel n.
17. Déterminer la limite de cette suite en $+\infty$.

Partie C : le cas général

Soit a un nombre réel. On considère l'application θ définie par :

$$\theta : \begin{cases} E_a & \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

18. Rappeler sans démontrer quelle est la structure algébrique de l'ensemble des suites réelles.
19. Démontrer que E_a est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.
20. Démontrer θ est une application linéaire.
21. Démontrer que θ est une application bijective.
22. En déduire la dimension de l'espace vectoriel E_a.
23. Déterminer une base de E_0 et une base de E_3.